Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1/4
Adres:	Studierichting: Wiskunde	Tentamen: Complexe Analyse midterm
Postcode en		Datum: 31-01-2003
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving: 2001	Naam docent: H. Winkler

1/a ~~$\frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{|1-2i|} = \frac{1+2i}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i \Rightarrow$~~

~~$\frac{3+2i}{1-2i} = (3+2i)\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i\right)$~~

~~$= \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}i - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}}i$~~

4 b $(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = \sqrt{32}\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$

a $\frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{|1-2i|^2} = \frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \Longrightarrow$

4 $\frac{3+2i}{1-2i} = (3+2i)\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \frac{1}{5}(3+2i)(1+2i) = \frac{1}{5}(3+6i+2i-4)$

$= -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$

2/a Een functie $f: O \to \mathbb{C}$ heet holomorf op O als de limiet

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

2 bestaat voor alle $a \in O$.

Een functie $f: O \to \mathbb{C}$ heet analytisch op O als voor iedere $z_0 \in O$ een machtreeks

2 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

convergeert

~~bestaat~~ en een $R>0$ zodat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall\ |z-z_0| < R$$

2 Stelling: f holomorf ~~des~~ dan en slechts dan als f analytisch is

z.o.z...

b

1 $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$

$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ → niet de definities, gevolg van def.

$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ net als e^z gedef. m.b.v. machtreeksen

De functie e^z heeft een convergentie-straal $R = \infty$ (aan te tonen m.b.v. het quotiëntenkenmerk). De functie e^z is op heel $\mathbb{C}$ analytisch: door middel van een translatie $z = w - w_0$ kunnen we e^z schrijven als een machtreeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$

Omdat e^z analytisch is geldt dan ook dat e^z holomorf is.

2

Dan zien we meteen dat $\sin(z)$ en $\cos(z)$ ook holomorf zijn, want het zijn sommen van holomorfe functies en deze zijn weer holomorf.

N.B. e^{iz} en e^{-iz} zijn holomorf, want het zijn samenstellingen van holomorfe functies en $z \mapsto iz$ en $z \mapsto -iz$ zijn ook holomorf.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

3 a Aangenomen dat f holomorf is, dan bestaat de limiet

$$\lim_{z_n \to a} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a}$$

Voor alle rijtjes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die naar a convergeren.

Schrijf $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

1) Neem als speciale rij $z_n = a + h$ met $a = a_1 + i \cdot a_2$ met $h \to 0$ als $n \to \infty$

dan $$\lim_{z_n \to a} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \cancel{\lim_{h \to 0} u(a_1+h, a_2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(a_1+h, a_2) - u(a_1, a_2)}{h} + i \cdot \frac{v(a_1+h, a_2) - v(a_1, a_2)}{h}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a_1, a_2)$$

2) Neem als speciale rij $z_n = a + i \cdot k$ met $a = a_1 + i \cdot a_2$ met $k \to 0$ als $n \to \infty$

dan $$\lim_{z_n \to a} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} =$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{u(a_1, a_2+k) - u(a_1, a_2)}{i \cdot k} + i \cdot \frac{v(a_1, a_2+k) - v(a_1, a_2)}{i \cdot k}$$

N.B. $\frac{1}{i} = -i$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{v(a_1, a_2+k) - v(a_1, a_2)}{k} - i \cdot \frac{u(a_1, a_2+k) - u(a_1, a_2)}{k}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(a_1, a_2) - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)$$

Hieruit volgen de differentiaal vergelijkingen van Cauchy - Riemann:

5 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Opmerking: hoewel niet gevraagd moest ik ze wel afleiden, ik was niet meer zeker van wat ik in mijn hoofd had... Ok.

b $Re(f) = u(x,y)$ dus als $Re(f) = \text{const.}$ dan $u(x,y) = \text{const.} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Met de dv'en van Cauchy - Riemann volgt dan dat ook: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

5 Dus $Im(f)$ is constant

$$\left.\begin{matrix} Re(f) = \text{constant} \\ Im(f) = \text{constant} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f = \text{constant.}$$

4 a $\Gamma \subset \mathbb{C}$ kromme met C^1 - parametrisering $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Gamma$ en f continu

$\int_\Gamma f(z)\,dz$ is per ~~definitie~~ definitie gelijk aan

5 $$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

b $$\int_{\Gamma_2} \cos(u)\,du = \int_0^1 \cos(tz)\cdot z\,dt$$

5 $$= \left[\sin(tz)\right]_0^1 = \sin(z) - \sin(0) = \sin(z)$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

5 a Zij f holomorf op K
(K in $\mathbb{C}$ of $D(\alpha, r)$ en compact)
∂K stuksgewijs glad dan is
$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0$$
~ niet helemaal ....

4

b C is een gladde, gesloten kromme
en C verenigd met zijn inwendige
is een compacte verzameling. Met
de stelling van Cauchy volgt dan dat
$$\int_C \sin(z)\,dz = 0$$
(N.B. $\sin(z)$ is holomorf)

5

6 a Formule van Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$
Voor alle z binnen de schijf waarvan C_r de rand is.

waarbij C_r = een cirkel met straal r.

5

b

$$\int_C \frac{\cos(z)}{z+1}\,dz = \int_C \frac{\cos(z)}{z-(-1)}\,dz = 2\pi i \cdot \cos(-1)$$

formule van Cauchy toegepast...

5

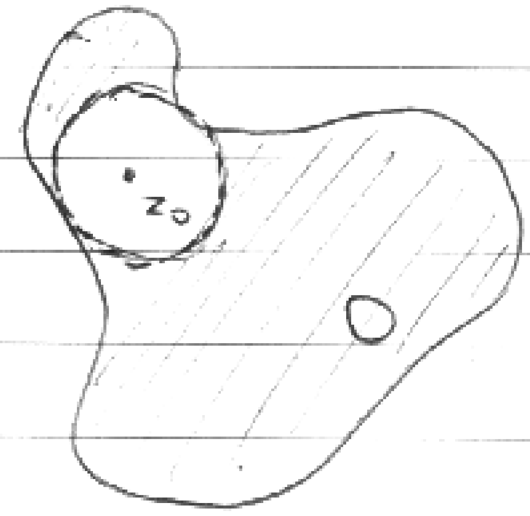
7 a

De convergentie straal van de machtreeks

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

4

is minstens gelijk aan de afstand van z_0 tot de rand van O.



b

De machtreeks $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ is een Taylor-ontwikkeling rondom $z_0 = 0$

In $z = 1$ is de functie niet gedefinieerd want dan is de noemer gelijk aan nul.

4

(Heeft dat niet een pool of zo ?)

De convergentie straal is de afstand van $z = 0$ tot de pool $z = 1$ (geleerd bij Fourier theorie)

dus de convergentiestraal is 1.

kan ook met prod van reeksen en wortel/quotient kenmerk

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{1-z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)\left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right)$$

$$= z + z^2 + \left(1 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{3!}\right) z^3 + \dots$$

Dus $a_0 = 0$

4

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 1 - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

8/a Principe van eenduidige analytische voortzetting:

5 Als $f(x) = g(x)$ voor alle x op een verzameling die 0 als verdichtingspunt heeft, dan is $f = g$.

b Als we in de functies in 2b) $z = x$ invullen met $x \in \mathbb{R}$, dan is 0 inderdaad een verdichtingspunt van $\mathbb{R}$ en op $\mathbb{R}$ zijn de functies exp, sin en cos gelijk aan de

5 machtreeksen die volgen uit 2b)

Met gebruik van het principe van eenduidige analytische voortzetting volgt hieruit dat de reeksen in 2b) de enige functies zijn die de functies exp, sin en cos (zoals we die kenden op $\mathbb{R}$) voortzetten ~~op $\mathbb{C}$~~. of ~~en~~ uitbreiden op $\mathbb{C}$.

9/a Liouville: een begrensde, geheel analytische functie is constant.

5

b Met de stelling van Liouville kan men het globale maximum-modulus-principe

2 bewijzen. ~ wordt eerder eenduidige analytische voortzetting voor gebruikt